第６講　指数・対数・三角関数

1　[1]　a, b, c をそれぞれ１より大きい数とする．このとき，

$1<\log_{ab} a+\log_{bc} b+\log_{ca} c<2$ であることを示せ．

[2]　次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ \log_x y+\log_y x = \dfrac{13}{6} \end{cases}$$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1)　$x \leqq \log_2 \dfrac{x^3-1}{x^3} \leqq 1$ を満たす x の範囲を求めよ．

(2)　xy 平面において，x 座標が(1)を満たす点の集合と $3x \leqq y \leqq x^3+2$ で表される図形との共通部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　単位円上の点 $(a,\ b)$　$(a^2+b^2=1)$ から，放物線 $y=x^2$ へ異なる 2 本の接線が引けるとき，この 2 本の接線と $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を最大にしたい．このような点 $(a,\ b)$ を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　指数・対数・三角関数

1　[1]　a, b, c をそれぞれ1より大きい数とする．このとき， $1<\log_{ab}a+\log_{bc}b+\log_{ca}c<2$ であることを示せ．

$$\log_{ab}a+\log_{bc}b+\log_{ca}c=\frac{1}{\log_a ab}+\frac{1}{\log_b bc}+\frac{1}{\log_c ca}=\frac{1}{1+\log_a b}+\frac{1}{1+\log_b c}+\frac{1}{1+\log_c a}\quad\cdots\cdots①$$

$\log_a b=A$, $\log_b c=B$, $\log_c a=C$ とおくと，$A>0$, $B>0$, $C>0$

また，$ABC=\dfrac{\log_k b}{\log_k a}\cdot\dfrac{\log_k c}{\log_k b}\cdot\dfrac{\log_k a}{\log_k c}=1$

よって

$$①=\frac{1}{1+A}+\frac{1}{1+B}+\frac{1}{1+C}=\frac{(1+B)(1+C)+(1+C)(1+A)+(1+A)(1+B)}{(1+A)(1+B)(1+C)}$$

$$=\frac{AB+BC+CA+2(A+B+C)+3}{AB+BC+CA+A+B+C+2}$$ この分数の分母，分子はともに正

(分子)−(分母)$=A+B+C+1>0$　より　(分子)>(分母)　ゆえに　①>1

2(分母)−(分子)$=AB+BC+CA+1>0$　より　2(分母)>(分子)ゆえに　①<2

以上より　$1<\log_{ab}a+\log_{bc}b+\log_{ca}c<2$　である．

1　[2]　次の連立方程式を解け． $\begin{cases} x^y=y^x & \cdots\cdots① \\ \log_x y+\log_y x=\dfrac{13}{6} & \cdots\cdots② \end{cases}$

底の条件より　$x>0$, $x\neq1$, $y>0$, $y\neq1$　これは，真数条件を満たす．

①より　$y=\log_x y^x=x\log_x y$　　よって　$\log_x y=\dfrac{y}{x}$　これを t とおく　$(t>0,\ t\neq1)$．

②より　$\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}=\dfrac{13}{6}$　　$t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{13}{6}$　　$6t^2-13t+6=0$　　よって　$t=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{2}{3}$

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき　$\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2}$　　$y=\dfrac{3}{2}x$　　また，①より　$y=x^{\frac{y}{x}}=x^{\frac{3}{2}}$

よって　$x^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}x$　　$x^3=\dfrac{9}{4}x^2$　　よって　$x=\dfrac{9}{4}$　　このとき　$y=\dfrac{27}{8}$

$t=\dfrac{2}{3}$ のとき　$\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{3}$　　$y=\dfrac{2}{3}x$　　また，①より　$y=x^{\frac{y}{x}}=x^{\frac{2}{3}}$

よって　$x^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}x$　　$x^2=\dfrac{8}{27}x^3$　　よって　$x=\dfrac{27}{8}$　　このとき　$y=\dfrac{9}{4}$

以上より　$(x,\ y)=\left(\dfrac{9}{4},\ \dfrac{27}{8}\right),\ \left(\dfrac{27}{8},\ \dfrac{9}{4}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　(1)　$x \leqq \log_2 \dfrac{x^3-1}{x^3} \leqq 1$ を満たす x の範囲を求めよ．
(2)　xy 平面において，x 座標が(1)を満たす点の集合と $3x \leqq y \leqq x^3+2$ で表される図形との共通部分の面積を求めよ．

(1)　真数条件より　$\dfrac{x^3-1}{x^3}>0$　……①

$x \leqq \log_2 \dfrac{x^3-1}{x^3}$　より　$2^x \leqq \dfrac{x^3-1}{x^3}$　……②　①は②に含まれる．

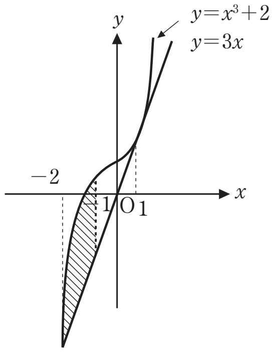
$\log_2 \dfrac{x^3-1}{x^3} \leqq 1$　より　$\dfrac{x^3-1}{x^3} \leqq 2$　$x(x^3-1) \leqq 2x^4$　　$x^4+x \geqq 0$

$x(x+1)(x^2-x+1) \geqq 0$　　$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$　より　$x \leqq -1,\ 0<x$

$x>0$ のとき　②の左辺 >1，②の右辺 $=1-\dfrac{1}{x^3}<1$　より不適.

$x \leqq -1$ のとき　②の左辺 $\leqq \dfrac{1}{2}$，②の右辺 $=1-\dfrac{1}{x^3}>1$　より適する.

以上より，求める x の範囲は　$\boldsymbol{x \leqq -1}$



(2)　$y=3x$ と $y=x^3+2$ の共有点のグラフの x 座標は　$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$　より　$x=1,\ -2$

よって，求める図形（右図斜線部分）の面積 S は

$$S=\int_{-2}^{-1}(x^3+2-3x)dx=\left[\frac{x^4}{4}+2x-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}=\boldsymbol{\frac{11}{4}}$$

3　単位円上の点 $(a,\ b)$ $(a^2+b^2=1)$ から，放物線 $y=x^2$ へ異なる 2 本の接線が引けるとき，この 2 本の接線と $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を最大にしたい．このような点 $(a,\ b)$ を求めよ．

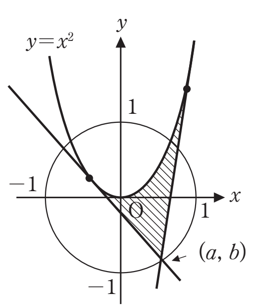
$(a,\ b)$ は単位円上の点より，$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta$ とおける．

C：$y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$y=2t(x-t)+t^2$　つまり　$y=2tx-t^2$

これが $(a,\ b)$ を通るので　$b=2ta-t^2$　　つまり　$t^2-2at+b=0$

題意より，この t の 2 次方程式は異なる 2 実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつ．



解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2a=2\cos\theta,\ \alpha\beta=b=\sin\theta$

題意の面積 S は

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$S=\int_{\alpha}^{a}\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx+\int_{a}^{\beta}\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{a}+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{a}^{\beta}=\frac{1}{3}(a-\alpha)^3-\frac{1}{3}(a-\beta)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$

ここで　$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=4\cos^2\theta-4\sin\theta=-4\sin^2\theta-4\sin\theta+4$

$$=-4\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2+5\quad(-1\leqq\sin\theta\leqq 1)$$ より

S は $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大となる．ゆえに　$(a,\ b)=(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　不等式 $\log_2 \dfrac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 1$ を満たす点 (x, y) が存在する範囲を図示せよ.

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$ によって表される領域内を動くとき2次式 $7x^2+4xy+4y^2$ のとる値の最大値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　不等式 $\log_2 \dfrac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 1$　……①　を満たす点 (x, y) が存在する範囲を図示せよ.

解答例

(真数)>0　より　$\dfrac{2-x^2-y^2}{x+y}>0$　⟶　$(2-x^2-y^2)(x+y)>0$

よって　$\begin{cases} x+y>0 \\ 2-x^2-y^2>0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x+y<0 \\ 2-x^2-y^2<0 \end{cases}$

つまり　$\begin{cases} y>-x \\ x^2+y^2<2 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y<-x \\ x^2+y^2>2 \end{cases}$　……②

①より　$\dfrac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 2$　　$(x+y)(2-x^2-y^2) \leqq 2(x+y)^2$

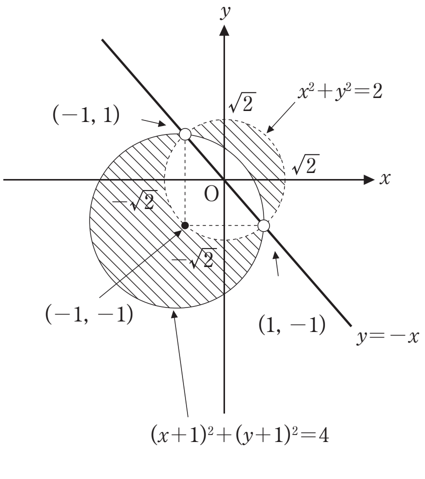
$(x+y)\{2-x^2-y^2-2(x+y)\} \leqq 0$

$(x+y)\{(x+1)^2+(y+1)^2-4\} \leqq 0$

よって　$\begin{cases} x+y \geqq 0 \\ (x+1)^2+(y+1)^2-4 \geqq 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x+y \leqq 0 \\ (x+1)^2+(y+1)^2-4 \leqq 0 \end{cases}$

つまり　$\begin{cases} y \geqq -x \\ (x+1)^2+(y+1)^2 \geqq 4 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y \leqq -x \\ (x+1)^2+(y+1)^2 \leqq 4 \end{cases}$　……③

②かつ③より，条件を満たす点が存在する範囲は下図斜線部分.
境界線は実線部分のみ含む.



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 **応用** 座標平面上の点 $P(x, y)$ が不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$ によって表される領域内を動くとき2次式 $7x^2+4xy+4y^2$ のとる値の最大値を求めよ.

解答例

点Pは $x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす点であることより

$P(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\ (0 \leqq r \leqq 2)$ とおくことができる.

円周上の点の三角関数による表現である．今回は「円の内部」も表す必要があるため，半径に範囲をもたせることによって実現した.

$$
\begin{aligned}
&7x^2+4xy+4y^2\\
&=7r^2\cos^2\theta+4r\cos\theta\cdot r\sin\theta+4r^2\sin^2\theta\\
&=7r^2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+4r^2\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+4r^2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\\
&=2r^2\sin 2\theta+\frac{3}{2}r^2\cos 2\theta+\frac{11}{2}r^2\\
&=\frac{5}{2}r^2\sin(2\theta+\alpha)+\frac{11}{2}r^2
\end{aligned}
$$

ただし，α は　$\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ を満たす鋭角.

よって，$7x^2+4xy+4y^2$ は

$r=2$，$\sin(2\theta+\alpha)=1$ のとき　最大値　$\frac{5}{2}\cdot 2^2\cdot 1+\frac{11}{2}\cdot 2^2=\mathbf{32}$　をとる.

※ $7x^2+4xy+4y^2=k$ とおいた人も少なくないであろう．しかし「xy」が邪魔をして「図形」が描けなかったはずだ．円周上の点をパラメータ θ で表す（媒介変数表示）ことにより，x と y を別々に扱うことができることがこの解法の目玉である.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。